

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μία παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι:

**α.** όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

**β.** κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Μονάδες 10**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν  $z_1, z_2$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής.

Αν  $f'(x) > 0$  στο  $(\alpha, x_0)$  και  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , τότε το  $f(x_0)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$ .

**Μονάδες 2**

- γ. Μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2) .$$

**Μονάδες 2**

- δ. Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx .$$

**Μονάδες 2**

- Γ. Πότε μία ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  ;

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 2ο**

- α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο ( $\Sigma$ ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z|=2 \text{ και } \text{Im}(z) \geq 0 .$$

**Μονάδες 12**

- β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $z$  κινείται στο σύνολο ( $\Sigma$ ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{4}{z} \right)$  κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα  $x'x$  .

**Μονάδες 13**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$  .

α. Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  .

**Μονάδες 5**

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$ , όταν το  $x$  τείνει στο  $-\infty$  .

**Μονάδες 6**

γ. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$  .

**Μονάδες 6**

δ. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$  .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$  με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη .

**Μονάδες 8**

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα.

**Μονάδες 8**

γ. Έστω η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$  .

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g$  στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα  $x'x$ , σχηματίζει με αυτόν γωνία  $45^\circ$  .

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.  
Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά τη 10.00η πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**