Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1°

Α.1 Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 9

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f: Α → IR λέγεται "1-1";

Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

Μονάδες 2

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο $(α,x_o)$ και κοίλη στο $(x_o,β)$ ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $Α(x_o\ f(x_o))$

είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 2

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά fog ≠ gof.

Μονάδες 2

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \bar{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 2

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και λ ∈ IR *, τότε ισχύει:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$z_1 + z_2 = 4+4i$ και $2z_1 - \bar{z}_2 = 5+5i$,

να βρείτε τους z_1, z_2.

Μονάδες 10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z = w και

Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in$ IR .

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

Μονάδες 7

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004 + f(x^2 - 8)\right) = -2$.

Μονάδες 9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{668}x + 2005$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: IR →IR ,για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005 \quad .$$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$

Μονάδες 4

ii. $f'(0)=1$.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το $\lambda \in IR$ έτσι, ώστε:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3 \quad .$$

Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο IR και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x \in IR$,

να δείξετε ότι:

i. $xf(x)>0$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.

4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ